Actividad	Tema	Grado
Guía	Conceptos básicos Sistemas de Ecuaciones lineales	9°

Docente	Estudiante
Tulio Suarez	

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES (DE PRIMER GRADO) CON DOS INCÓGNITAS.

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones que deben verificarse simultáneamente.

La expresión general de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

donde ***a***, ***b***, ***c***, ***a'***, ***b'*** y ***c'*** son números reales conocidos y, ***x*** e ***y*** son las incógnitas.

- Una **solución** de un sistema es un conjunto de valores (uno para cada incógnita) que cumplen a la vez todas las ecuaciones del sistema. Una solución de un sistema tiene tantos valores como incógnitas.
- **Resolver** un sistema es hallar todas sus soluciones.

Observa que un conjunto de valores de las incógnitas será solución del sistema si lo es de *todas y cada una* de las ecuaciones que forman el sistema. Así, por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

los valores $x = 1$, $y = 1$ son solución de las dos primeras ecuaciones pero no de la tercera, por lo que no es una solución del sistema. Es más, este sistema no tiene ninguna solución porque no hay ninguna pareja de valores para x e y que sea solución de las tres ecuaciones a la vez.

En cambio, si la tercera ecuación del sistema fuera $x + y = 2$, entonces $x = 1$, $y = 1$ sí sería solución, que podríamos representar también como $(x, y) = (1, 1)$.

Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Cada una de las ecuaciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se corresponde con una recta.

Si representamos sobre los ejes coordenados las rectas correspondientes a las dos ecuaciones, el punto de intersección (si lo tienen) pertenece a ambas rectas y, por tanto, debe verificar las dos ecuaciones. Por ello, sus coordenadas forman la solución del sistema.

__Ejemplo:__

Consideramos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{array}\right.$$

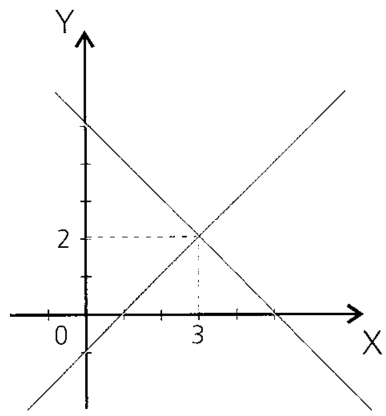
Representamos gráficamente las dos rectas:

$y = -x + 5$

x	y
0	5
5	0

$y = x - 1$

x	y
0	−1
1	0



Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), y así el sistema es compatible determinado y su solución es (x = 3, y = 2).

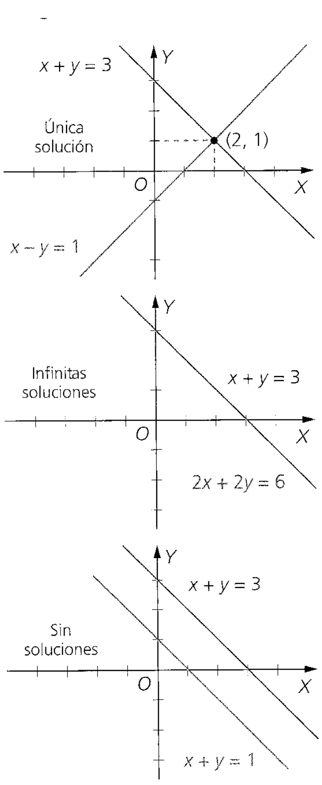
Fácilmente se deducen las siguientes consideraciones:

— Si el sistema es compatible determinado, en este caso las dos rectas son secantes, es decir, se cortan en un punto.

— Si el sistema es compatible indeterminado, en este caso las dos rectas son coincidentes.

— Si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas.

Sistemas compatibles e incompatibles. Interpretación gráfica



- En función del número de soluciones, los sistemas se clasifican en:
  - **Compatibles:** son los que tienen, al menos, una solución.
    - — **Determinado,** si posee una única solución.
    - — **Indeterminado,** si posee más de una solución (poseen infinitas soluciones).
  - **Incompatibles:** son los que no poseen solución.

EJEMPLOS		
$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$
Compatible determinado	Compatible indeterminado	Incompatible
Su única solución es: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	Sus infinitas soluciones son: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \end{cases}$ siendo t cualquier número real	Carece de soluciones

Equivalencia de sistemas.

Se dice que dos **sistemas** de ecuaciones lineales son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones.**

Ejemplo: Los sistemas

$$\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 7x + 6y = 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$$

son equivalentes, porque ambos tienen como solución el par de valores $x = -2$, $y = 3$.

Para resolver un sistema es útil convertirlo en otro equivalente en el que sea más sencillo encontrar los valores de las incógnitas.

Las siguientes reglas transforman un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente:

- **Sumar la misma cantidad en ambos miembros** de una ecuación.
- **Multiplicar ambos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.**
- **Sumar** miembro a miembro **una ecuación a otra ecuación.**

Ejemplo: Si en el sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$$

se multiplica la primera ecuación por -3, se tiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -6x + 3y = 18 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$$

y si se suma ahora la primera a la segunda, queda el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -6x + 3y = 18 \\ 6y = 24 \end{cases}$$

Este nuevo sistema tiene la ventaja de que una de las ecuaciones contiene sólo una incógnita, y se puede despejar, con lo que el sistema se ha convertido en otro de más fácil solución.

Métodos algebraicos de resolución.

Ya hemos visto la interpretación y resolución gráfica de un sistema. También existen tres métodos que permiten resolver algebraicamente un sistema: sustitución, igualación y reducción. Vamos a aplicarlos al sistema $\begin{cases} 4x - y = 15 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

Método de sustitución

$$\left.\begin{aligned} 4x - y &= 15 \\ x &= 6 - 2y \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 4 \cdot (6 - 2y) - y &= 15 \\ x &= 6 - 2y \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Método de igualación

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{15 + y}{4} \\ x &= 6 - 2y \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{15 + y}{4} &= 6 - 2y \\ x &= 6 - 2y \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Método de sustitución

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
   $$x = 6 - 2y \quad \text{(en la segunda ecuación)}$$
2. Se sustituye el valor de esta incógnita en la otra ecuación.
   $$4 \cdot (6 - 2y) - y = 15$$
3. Se resuelve esta ecuación.
   $$24 - 8y - y = 15; \quad 9y = 9 \Rightarrow y = 1$$
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación donde se había despejado la incógnita, y se resuelve.
   $$x = 6 - 2 \cdot 1 \Rightarrow x = 4$$

Método de igualación

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
   $$x = \frac{15 + y}{4}; \quad x = 6 - 2y$$
2. Se igualan las dos expresiones.
   $$\frac{15 + y}{4} = 6 - 2y$$
3. Se resuelve esta ecuación resultante.
   $$15 + y = 4 \cdot (6 - 2y); \quad 15 + y = 24 - 8y; \quad 9y = 9 \Rightarrow y = 1$$
4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones en las que aparecía despejada la misma incógnita, y se resuelve.
   $$x = 6 - 2 \cdot 1 \Rightarrow x = 4$$

Método de reducción

$$\left.\begin{aligned} 8x - 2y &= 30 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\} \Downarrow \left.\begin{aligned} 9x &= 36 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\} \Downarrow \left.\begin{aligned} x &= 4 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\} \Downarrow \left.\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Método de reducción

1. Se multiplican o dividen los dos miembros de las ecuaciones por los números que convengan, para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas.
$$4x - y = 15 \text{ (multiplicamos por 2)}; \quad 8x - 2y = 30$$
2. Se suman o restan las dos ecuaciones miembro a miembro, para que una de las incógnitas desaparezca.
$$\begin{array}{r} 8x - 2y = 30 \\ x + 2y = 6 \\ \hline 9x = 36 \end{array}$$
3. Se resuelve la ecuación resultante: $9x = 36 \Rightarrow x = 4$
4. Este valor se sustituye en una de las ecuaciones iniciales, y se resuelve.
$$4 + 2y = 6; \quad 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

DETERMINANTES

A partir de los determinantes podemos encontrar la solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= m \\ c\,x + d\,y &= n \end{aligned}$$

En este caso:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{m\,d - b\,n}{a\,d - b\,c}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_p} = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a\,n - m\,c}{a\,d - b\,c}$$

Ejemplo 1

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Primero encontramos el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = (-1) - (1) = -2$$

Ahora calculamos el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (10)(-1) - (1)(2) = (-10) - (2) = -12$$

Y finalmente calculamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (10)(1) = (2) - (10) = -8$$

Ahora podemos calcular la solución del S.E.L.:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-12}{-2} = 6$$
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_p} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Y ya sabemos que la solución es correcta (Este S.E.L. ya se resolvió por varios métodos. Puedes ver la solución en las lecciones previas).